

## Simplekste Sobolev Ortogonal Polinomlar

Rabia AKTAŞ

Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

E-Posta : raktas@science.ankara.edu.tr

### ÖZET

Ortogonal polinomların matematiksel istatistik, kuantum mekaniği ve matematiksel fiziğin uygulamalarında önemli bir yeri vardır. Bir değişkenli klasik orthogonal polinomların ilk örnekleri A.M. Legendre, P.S. Laplace, J.L. Lagrange ve N.H. Abel tarafından ele alınmıştır. Daha sonraları, P.L. Chebychev klasik orthogonal polinomların bazı önemli özel durumlarını araştırmış ve orthogonal polinomların genel teorisini geliştirmiştir. Bir değişkenli orthogonal polinomlar teorisi üzerinde yapılan çalışmalar ve elde edilen önemli sonuçlar C. Jacobi, C. Hermite, E. Laguerre ve T. Stieltjes tarafından verilmiştir. Ortogonal polinomlar teorisi üzerinde klasik sonuçlar Szegö (1939) tarafından ele alınmıştır.

Tek değişkenli orthogonal polinomlar alanındaki çalışmaların artışı; biortogonal, q-ortogonal, katlı orthogonal, discrete orthogonal, matris orthogonal ve Sobolev orthogonal polinomların da tanımlanarak, bu konulardaki alan çalışmalarının genişletilmesine neden olmuştur. Çok değişkenli orthogonal polinomlar ise bu alanlardaki çalışmaların oldukça yeni bir boyutunu oluşturmaktadır. Bir değişkenli orthogonal polinomların ışığı altında, çok değişkenli orthogonal polinomlar teorisi üzerinde de önemli çalışmalar yapılmıştır ve halen yapılmaya devam edilmektedir. Jackson (1938) bir bölgede keyfi bir ağırlık fonksiyonuna göre orthogonal olan iki değişkenli orthogonal polinomların en basit özelliklerini ele almıştır. Daha sonra, Krall ve Sheffer (1967), Jackson'ın sonuçlarını genelleştirmiş ve özfonksiyonları bir bölgede orthogonal polinomlar olan ikinci basamaktan bazı lineer kısmi diferensiyel operatörleri incelemiştir. Engeliş (1974) de benzer sonuçlar bulmuş ve iki değişkenli bazı orthogonal polinom sınıfları için Rodrigues formülünü elde etmiştir. Koornwinder (1975) iki değişkenli orthogonal polinomların bazı ailelerini tanımlamıştır. İki değişkenli orthogonal polinomlar teorisi üzerinde klasik sonuçlar Suetin (1988) tarafından ele alınmıştır. Son yıllarda çok değişkenli orthogonal polinomlar teorisi üzerinde önemli çalışmalar verilmiştir (Dunkl ve Xu 2001, Xu, 2006, 2008, Pinar ve Xu 2009, Aktas et al. 2011). Çok değişkenli Sobolev orthogonal polinomlar bu alanının oldukça yeni bir kısmını oluşturmaktadır.

Bu seminerde, ilk olarak bir değişkenli, iki değişkenli ve çok değişkenli klasik orthogonal polinomlar hakkında genel bilgiler verilecek. Daha sonra Sobolev orthogonal polinomların özelliklerinden bahsedilip, simplekteki Sobolev orthogonal polinomlar tanımlanacak ve bunların ortogonalite özellikleri incelenecektir (Aktas ve Xu, 2013).

**Anahtar Kelimeler** : Ortogonal polinom, Sobolev orthogonal polinom, özfonksiyon, kısmi türev operatörü

### ABSTRACT

Orthogonal polynomials have important applications in mathematical statistics, quantum mechanics and mathematical physics. The first examples of orthogonal polynomials in one variable have been given by A.M. Legendre, P.S. Laplace, J.L. Lagrange and N.H. Abel. Then, P.L. Chebychev have studied some special cases of classical orthogonal polynomials and developed the general theory of orthogonal polynomials. The important results on the theory of orthogonal polynomials in one variable have been given by C. Jacobi, C. Hermite, E. Laguerre, T. Stieltjes and Szegö. The studies on the area of orthogonal polynomials in one variable have led to be defined biorthogonal, q-orthogonal, multiple orthogonal, discrete orthogonal, matrix orthogonal and Sobolev orthogonal polynomials. Orthogonal polynomials in several variables form a new part of the studies in this area. In a view of one-variable orthogonal polynomials,

important research papers have been given in this area and have been still continued to be studied. Jackson (1938) introduced polynomials which are orthogonal with respect to a weight function in domain and their basic properties. After that, Krall and Sheffer (1967) generalized Jackson's results and introduced some second-order partial differential equations whose eigenfunctions are orthogonal in a domain. Engelis (1974) obtained Rodrigues formulas for some of two-variable orthogonal polynomials. Koornwinder (1975) defined some families of two-variable orthogonal polynomials. The classical results on the theory of two-variable orthogonal polynomials were given by Suetin (1988).

Recently, the important results on the theory of orthogonal polynomials in several variables have been given (Dunkl and Xu 2001, Xu, 2006, 2008, Pinar and Xu 2009, Aktas et al. 2011). Sobolev orthogonal polynomials in several variables form a new area of the theory of orthogonal polynomials.

In this talk, we first give basic information about orthogonal polynomials in one variable, in two variables and in several variables. Then, we mention about properties of Sobolev orthogonal polynomials. Finally, we define Sobolev orthogonal polynomials on a simplex and examine orthogonality properties of them (Aktas and Xu, 2013).

**Key Words:** Orthogonal Polynomial, Sobolev orthogonal polynomial, eigenfunction, partial differential operator

#### **KAYNAKLAR – REFERENCES**

- [1] Aktaş, R., Altın, A. and Taşdelen, F. 2011. A note on a family of two-variable, J. Comput. Appl. Math., Vol. 235; pp. 4825-4833.
- [2] Dunkl, C.F. and Xu, Y. 2001. Orthogonal polynomials of several variables, Cambridge univ. press, 390 p., New York.
- [3] Engelis, G.K. 1974. On some two-dimensional analogues of classical orthogonal polynomials. Latv. Mat. Ezhegodnik, Vol. 15; pp. 169-202.
- [4] Jackson, D. 1936. Formal properties of orthogonal polynomials in two variables, Duke Math. Journal, Vol. 2; pp. 423-434.
- [5] Koornwinder, T. H. 1975. Two variable analogues of the classical orthogonal polynomials. Theory and application of special functions, Acad. Press. Inc., New York.
- [6] Krall, H. L. and Sheffer, I. M. 1967. Orthogonal polynomials in two variables. Ann.Math. Pura Appl., Vol. 4; pp. 325-376.
- [7] Piñar, M. and Xu, Y. 2009. Orthogonal polynomials and partial differential equations on the unit ball. Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 137; pp. 2979-2987.
- [8] Suetin, P.K. 1988. Orthogonal polynomials in two variables. Gordon and Breach Science Publishers, 348 p., Moscow.
- [9] Szegö, G. 1939. Orthogonal polynomials. American Mathematical Society Colloquium Publications, 403 p., New York.

- [10] Xu, Y. 2006. A family of Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball. *J. Approx. Theory*, Vol. 138; pp. 232-241.
- [11] Xu, Y. 2008. Sobolev orthogonal polynomials defined via gradient on the unit ball., *J. Approx. Theory*, Vol. 152; pp. 52-65.
- [12] Aktas, R. and Xu, Y. 2013. Sobolev orthogonal polynomials on a simplex, *International Mathematics Research Notices*, Vol. 2013 (13); pp. 3087-3131.