Metrik Uzaylarda Kompaktlık, Bourbaki-Tamlık ve Tamlık

Merve İLKHAN
Düzce Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
E-Posta : merveilkhan@duzce.edu.tr

ÖZET

Kompakt metrik uzaylar ve tam metrik uzaylar matematikte önemli yere sahiptir. Tam metrik uzaylar ile mantık, sabit nokta teorisi, bilgisayar bilimi, kuantum mekaniği gibi özellikle matematiğin fonksiyonel analiz ve diğer bilimlerin birçok dalında karşılaşılır. Fonksiyonel analizde çeşitli uygulamaları olan birçok temel sonucun ispatlanmasında tam metrik uzaylar önemli rol oynar. Banach sabit nokta teoremi tam metrik uzaylar teorisi için kullanışlı bir özelliktir. Lineer eşitsizlikler, optimizasyon ve yaklaşım teorisi gibi alanlarda çok fazla uygulaması olması nedeni ile sabit nokta teorisindeki ilerleme oldukça ilgi çekmiş ve bu alanda birçok çalışma yapılmıştır. Kompaktlık kavramı da metrik uzaylar teorisinde etkili role sahiptir. Kompakt metrik uzay üzerinde tanımlı sürekli her fonksiyon düzgün süreklidir. Fakat bir metrik uzay üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyonun düzgün sürekli olması için kompaktlık gerekli değildir. Üzerinde tanımlı sürekli her fonksiyonun düzgün sürekli olduğu metrik uzayları karakterize etmek için ilk çalışma Nagata [1] tarafından yapılmıştır. Daha sonra Monteiro ve Peixoto [2] bu tür uzayların dört yeni karakterizasyonunu vermişlerdir. 1958 yılında Atsuji [3] tarafından bu uzayların birçok yeni karakterizasyonu verilmiştir. Bu amaçla Bourbaki-sınırlılık kavramı ortaya çıkmıştır.
Tamlıktan daha kuvvetli kompaktlıktan daha zayıf özellikleri sağlayan metrik uzaylar birçok matematikçi tarafından araştırılmaktadır ve yıllardır birçok makalenin araştırma konusu olmuştur. Bu tür uzayların taşıdığı önem nedeniyle birçok yazar bu uzayların çeşitli karakterizasyonları üzerine çalışmıştır. Bu uzaylara örnek olarak Atsuji uzayları verilir. Bunun dışında cofinal-tam [4], sınırlı kompakt, düzgün yerel kompakt, kuvvetli cofinal tam [5] metrik uzaylar da kompakt ve tam uzaylar arasında yer alan önemli uzay örnekleridir. Bu uzayların hepsi konveks analiz, optimizasyon teorisi ve hiperyüzeyler üzerindeki yakınsama yapıları ortamındaki problemler ile bağlantılıdır. Metrik uzaylar için bir özelliğin tamlıktan daha kuvvetli olmasını sağlamanın bir yolu uzaydaki Cauchy dizileri sınıfından daha genel bir sınıfa ait olan tüm dizilerin yakınsak alt dizilerinin bulunmasını sağlamaktır. Bu amaçla Garrido ve Merono [3] metrik uzaylarda Bourbaki Cauchy ve cofinal Bourbaki Cauchy dizisi tanımlarını vererek bu diziler yardımıyla farklı iki tamlık kavramı sunmuşlardır. Tamamen sınırlı kümelerin Cauchy dizileri yardımıyla karakterize edildiği gibi Garrido ve Merono [3] Bourbaki Cauchy ve cofinal Bourbaki Cauchy dizileri yardımıyla Bourbaki sınırlılığı karakterize etmişlerdir. Bu yeni diziler de aslında bir metrik uzayda Bourbaki sınırlı kümeler düşünüldüğünde ortaya çıkmıştır.
Bu seminerde metrik uzayda ve asimetrik metrik uzayda tüm bu kavramlar tanıtılarak Bourbaki-tamlık kavramının kompaktlık ve tamlık arasında yer alan bir özellik olduğu gösterilecektir. Örnekler üzerinde tüm bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Anahtar Kelimeler : Kompaktlık, Tamlık, Bourbaki-sınırlılık, Bourbaki-tamlık

ABSTRACT

Compact metric spaces and complete metric spaces have an important place in mathematics. It is encountered with complete metric spaces especially in the branch of functional analysis of mathematics and in many branches of other sciences such as logic, fixed point theory, computer science, quantum mechanics. Complete metric spaces play an important role in proving many basic results that are applied in functional analysis. The Banach fixed point theorem is a useful property for complete metric spaces theory. Progress in fixed point theory has been very interesting and many studies have been conducted since there is a lot of applications in areas such as linear inequalities, optimization and approach theory. The concept of compactness also plays an effective role in the theory of metric spaces. Every continuous function defined on a compact metric space is uniformly continuous. However, compactness is not necessary for uniform continuity of a continuous function defined on a metric space. The first study to characterize the metric spaces on which each continuous function is uniformly continuous was

performed by Nagata [1]. Later, Monteiro and Peixoto [2] gave four new characterizations of such spaces. In 1958, many new characterizations of these spaces were given by Atsuji [3]. For this purpose, the concept of Bourbaki-boundedness emerged.

Metric spaces satisfying properties stronger than completeness but weaker than compactness have been investigated by many mathematicians and have been the research topic of many articles for many years. Because of the importance of such spaces, many authors have studied various characterizations of these spaces. Atsuji spaces are given as examples of these spaces. In addition, the cofinal-complete [4], bounded compact, uniform local compact, strongly cofinal complete [5] metric spaces are important examples of spaces between compact and complete metric spaces. All of these spaces are associated with problems in the environment of convex analysis, optimization theory and convergence structures on hypersurfaces. One way to achieve a property stronger than completeness for metric spaces is to find convergent subsequences of all sequences belonging to a class more general than the class of all Cauchy sequences in the space. For this purpose, Garrido and Merono [3] introduced the concepts of Bourbaki Cauchy and cofinal Bourbaki Cauchy sequences in metric spaces and defined two different concepts of completeness with the help of these sequences. As the totally bounded sets are characterized by the help of Cauchy sequences, Garrido and Merono [3] characterized Bourbaki boundedness by the aid of Bourbaki Cauchy and cofinal Bourbaki Cauchy sequences. These new sequences have actually appeared when one considers the Bourbaki bounded sets in a metric space.

In this seminar, all these concepts will be introduced in a metric space and in an asymmetric metric space and it will be shown that the concept of Bourbaki-completeness is a property between compactness and completeness. The relationships between all these concepts will be examined by examples.

Key Words: Compactness, Completeness, Bourbaki-boundedness, Bourbaki-completeness

KAYNAKLAR – REFERENCES

[1] J. Nagata, “On the uniform topology of bicompactifications,” Journal of the Instituteof Polytechnics, Osaka City University. Series A: Mathematics, vol. 1, no. 1, pp.28–38, 1950.

[2] A. Monteiro and M. M. Peixoto, “Le nombre de lebesgue et la continuité uniforme”, Portugaliae mathematica, vol. 10, no. 3, pp. 105–113, 1951.

[3] M. Atsuji, “Uniform continuity of continuous functions of metric spaces”, Pacific Journal of Mathematics, vol. 8, no. 1, pp. 11–16, 1958.

[4] G. Beer, “More about metric spaces on which continuous functions are uniformly continuous”, Bulletin of the Australian Mathematical Society, vol. 33, no. 3, pp. 397–406, 1986.

[5] G. Beer, “Between the cofinally complete spaces and the UC spaces”, Houston J. Math, vol. 38, pp. 999–1015, 2012.

[6] M. I. Garrido and A. S. Meroño, “New types of completeness in metric spaces”, Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica, vol. 39, no. 2, pp. 733–758, 2014.

ÖNERİLEN KAYNAKLAR – SUGGESTED REFERENCES

[1] S. Kundu and T. Jain, “Atsuji spaces: equivalent conditions,” in Topology Proceedings, vol. 30, no. 1, 2006, pp. 301–325.

[2] S. Cobza¸s, Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces. Basel: Birkhauser-Springer, 2013.

[3] G. Beer, “Metric spaces on which continuous functions are uniformly continuous and Hausdorff distance,” Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 95, no. 4, pp. 653–658, 1985.

[4] G. Beer, “UC spaces revisited,” The American Mathematical Monthly, vol. 95, no. 8, pp. 737–739, 1988.

[5] G. Beer, Topologies on closed and closed convex sets. Springer Science & Business Media, 1993, vol. 268.

[6] S. Kundu, M. Aggarwal, and S. Hazra, “Finitely chainable and totally bounded metric spaces: Equivalent characterizations,” Topology and its Applications, vol. 216, pp. 59–73, 2017.

[7] M. I. Garrido and A. S. Meroño, Some classes of bounded sets in metric spaces,” In Contribuciones matemáticas en honor a Juan Tarrés. UCM, pp. 179–186, 2012.

[8] I. L. Reilly, P. Subrahmanyam, and M. Vamanamurthy, “Cauchy sequences in quasi pseudo-metric spaces,” Monatshefte für Mathematik, vol. 93, no. 2, pp. 127–140,1982.